Τετάρτη 17 Μαΐου 2017

Η αρχή της στάσιμης δράσης

Ένα σωματίδιο που ξεκινά από ένα σημείο A τη χρονική στιγμή t_A και καταλήγει στο σημείο B τη χρονική στιγμή t_B αποδεικνύει τη διαδρομή για την οποία η ποσότητα ή αλλιώς η δράση (action)

$$S = \int_{t_A}^{t_B} L\,dt$$

είναι στάσιμη (stationary) εδώ το στάσιμο δηλώνει την ύπαρξη (έννοια) του ακρότατου.

Η ποσότητα $L = T - V$
$= E_{KIN} - E_{ΔΥΝ}$
καλείται συνάρτηση Lagrange ή Λαγκρανζιανή του συστήματος.

Παράδειγμα: Ένα σωματίδιο μάζας m που κινείται με σταθερή ταχύτητα και δεν επιδρούν σε αυτό άλλες δυνάμεις έχει $L = \frac{1}{2} m v^2$, v ταχύτητα του σωματιδίου.

Παρατήρηση: Ορίσαμε τη συνάρτηση Lagrange με τρόπο που απαιτεί να γνωρίζουμε τη δυναμική ενέργεια του συστήματος. Για την εύρεση της οποίας χρειαζόμαστε συντηρητικά πεδία. Δηλαδή αν υπάρχει σε ένα σύστημα απώλεια ενέργειας δηλαδή η ολική ενέργεια του συστήματος $E = E_{KIN} + E_{ΔΥΝ}$
$= T + V$
δεν διατηρείται (π.χ. ύπαρξη τριβών) τότε η μεθοδολογία της συνάρτησης Lagrange δεν εφαρμόζεται.

→

Γενικά σε μια διαδικασία έχουμε:

$$L = \underbrace{\frac{1}{2} m v^2}_{T} - \underbrace{V(x)}_{V}$$

και ελαχιστοποιούμε τη δράση $S = \int_{t_A}^{t_B} L\,dt$.

Δηλαδή $\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = 0$.

Παράδειγμα: Να βρεθούν οι εξισώσεις κίνησης σωματιδίου μάζας m που κινείται στο ομογενές βαρυτικό πεδίο της Γης. $V = V(x,\psi,z) = mgz$.

Απάντηση: Γνωρίζουμε ότι $T = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{\psi}^2 + \dot{z}^2)$

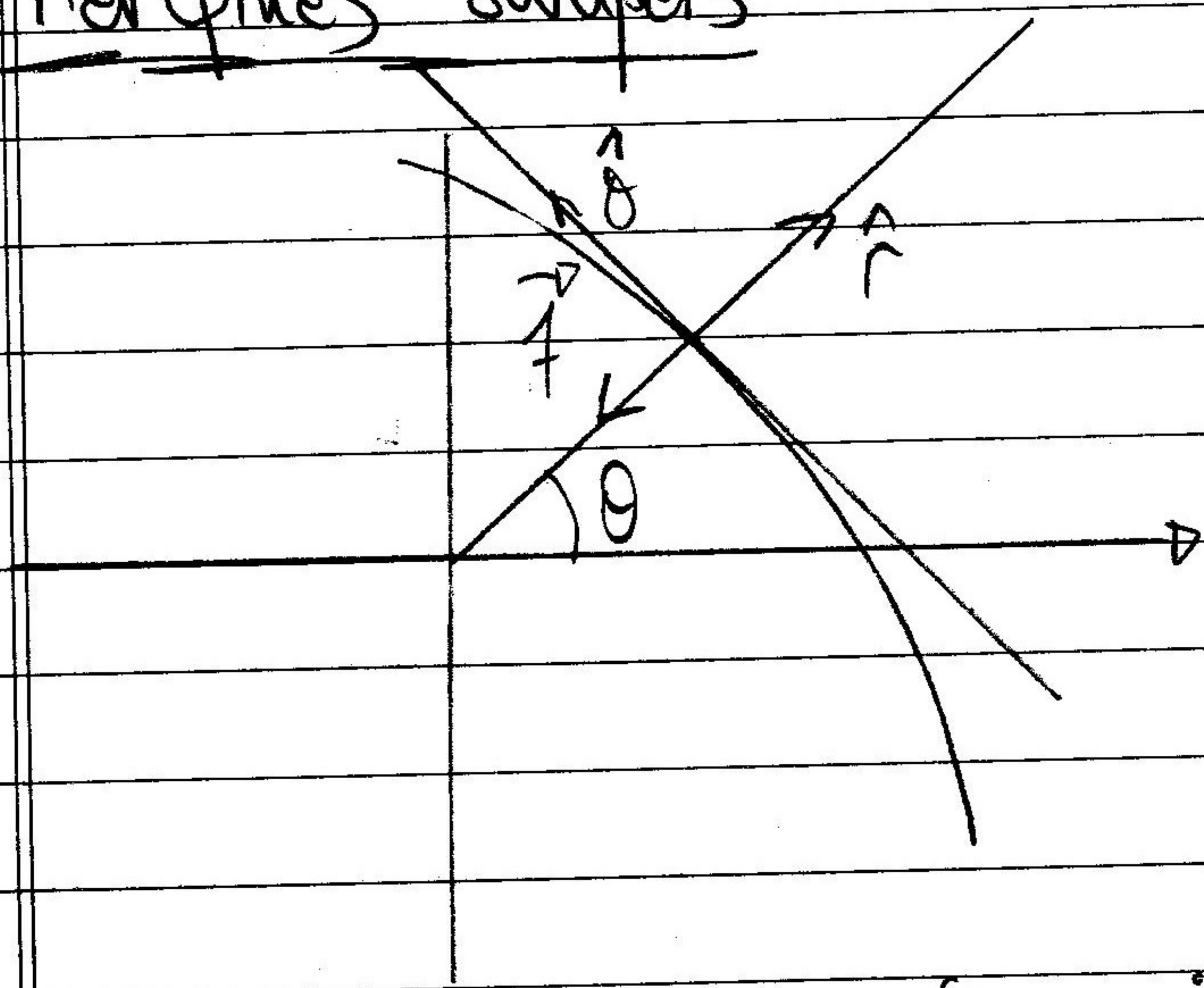
$$L = T - V = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{\psi}^2 + \dot{z}^2) - mgz$$

$$\left.\begin{array}{l}
\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = 0 \Rightarrow 0 - \frac{d}{dt}\cdot\frac{1}{2} m 2\dot{x} = 0 \\[2ex]
\frac{\partial L}{\partial \psi} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = 0 \Rightarrow 0 - \frac{d}{dt}\cdot\frac{1}{2} m 2\dot{\psi} = 0 \\[2ex]
\frac{\partial L}{\partial z} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = 0 \Rightarrow -mg - \frac{d}{dt}\frac{1}{2} \cancel{m} 2\dot{z} = 0
\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \ddot{x} = 0 \\ \ddot{\psi} = 0 \\ \ddot{z} + g = 0 \end{cases}$$

$\longrightarrow$

Κεντρικές δυνάμεις



Στο πολικό σύστημα συντεταγμένων

$$F_r = -f(r)\hat{r} = m a_r \hat{r}$$
$$F_\theta = 0 = m a_\theta \hat{\theta}$$

$$\left.\begin{aligned} F_r &= -f_r = m \cdot a_r = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \\ F_\theta &= 0 = m \cdot a_\theta = m(2\dot{r}\dot{\theta} + r \cdot \ddot{\theta}) \end{aligned}\right\} \text{Νόμος Newton}$$

Φορμαλισμός Lagrange

$$L = T - V = \frac{1}{2} m U_r^2 - V(r)$$
$$= \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + V(r)$$

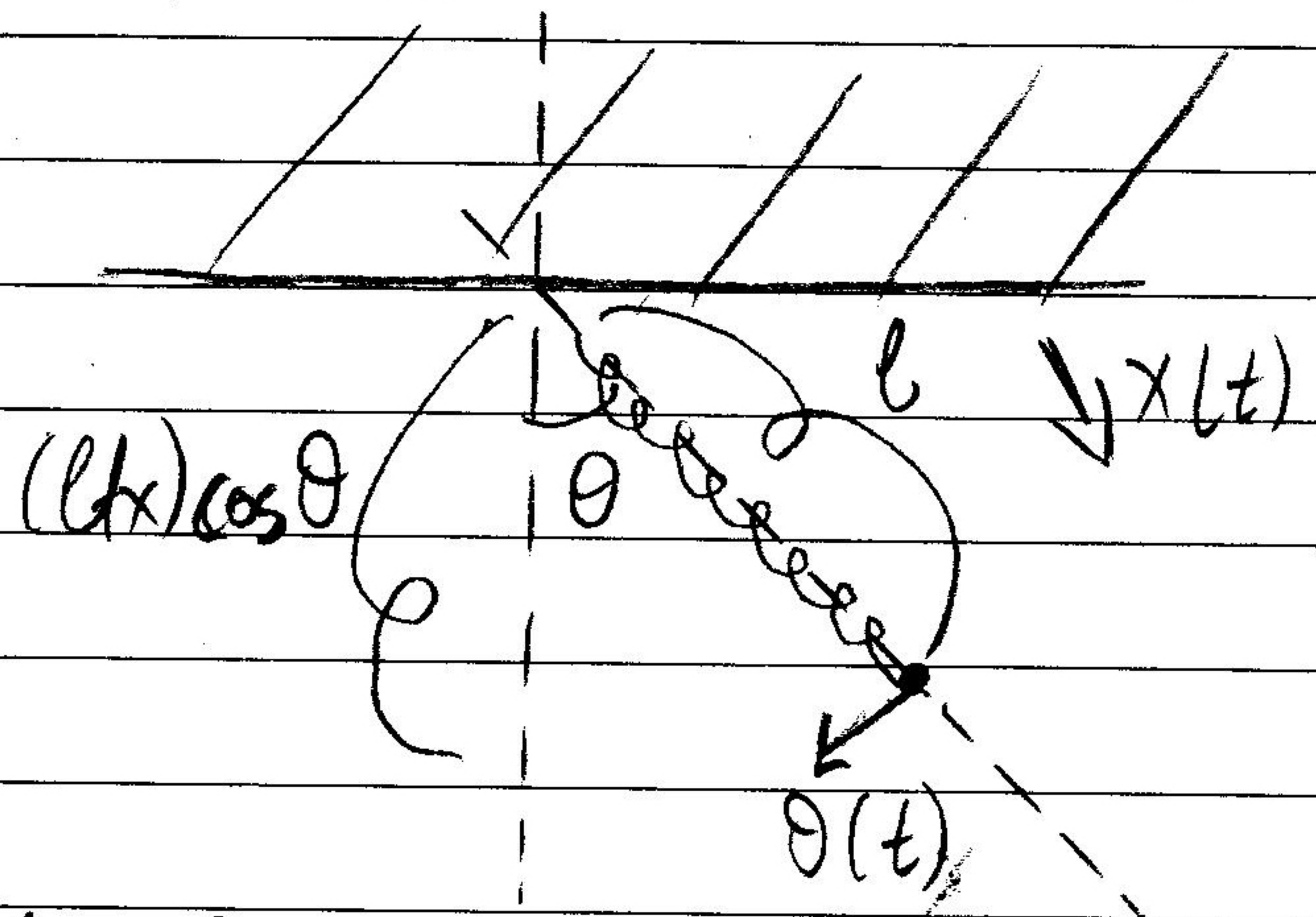
$$\begin{aligned} &\frac{\partial L}{\partial r} - \frac{d}{dt} \cdot \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = 0 \\ &\frac{\partial L}{\partial \theta} - \frac{d}{dt} \cdot \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = 0 \end{aligned} \left\{ \begin{aligned} &\frac{1}{2} m 2r \cdot \dot{\theta}^2 + \frac{\partial V}{\partial r} - \frac{d}{dt} \frac{1}{2} m \dot{r} \cdot 2 = 0 \\ &0 + \frac{d}{dt} \frac{1}{2} m r^2 2\dot{\theta} = 0 \end{aligned} \right.$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{aligned} &m r \dot{\theta}^2 + \frac{\partial V}{\partial r} - m\ddot{r} = 0 \\ &2r\dot{r}\dot{\theta} + r^2\ddot{\theta} = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} &m(r\dot{\theta}^2 - \ddot{r}) = -\frac{\partial V}{\partial r} \\ &2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} = 0 \end{aligned} \right.$$

$\longrightarrow$

$$\begin{cases} m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = -f(r) \\ 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} = 0 \end{cases}$$

<u>Παράδειγμα</u>: Το ελατήριο - εκκρεμές



Το ελατήριο έχει φυσικό μήκος ℓ σε μια τυχαία χρονική στιγμή η μετατόπισή του είναι $x = x(t)$, δηλαδή συνολικά $\ell + x(t)$.

Η κινητική του ενέργεια:

$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m \omega^2 \quad , \omega = (\ell + x)\dot{\theta}$$

$$= \frac{1}{2} m \left[\dot{x}^2 + (\ell+x)^2 \dot{\theta}^2\right]$$

$$V = \frac{1}{2} k x^2 - mg(\ell+x)\cos\theta .$$

Συνολικά $L = T - V = \frac{1}{2} m\left[\dot{x}^2 + (\ell+x)^2\dot{\theta}^2\right] - \frac{1}{2} k x^2 +$

$$+ mg(\ell+x)\cos\theta .$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} - \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}} = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \theta} - \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{2} m 2 \dot{\theta}^2 (\ell+x) - \frac{1}{2} k \cdot 2x + mg\cos\theta - \frac{d}{dt} \frac{1}{2} m \cdot 2\dot{x} = 0 \\ -mg(x+\ell)\sin\theta - \frac{d}{dt} \frac{1}{2} m (\ell+x)^2 2\dot{\theta} = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m(l+x)\dot{\theta}^2 + mg\cos\theta - m\ddot{x} \quad - Kx = 0 \\ m(l+x)\ddot{\theta} + 2m\dot{x}\dot{\theta} + mg\sin\theta = 0 \end{cases}$$

<u>Παρατήρηση:</u> $\underline{\theta = 0}$ $\begin{cases} mg - m\ddot{x} \quad - Kx = 0 \\ \theta = 0 \end{cases}$

$\underline{x=0}$ $\begin{cases} ml\dot{\theta}^2 + mg\cos\theta = 0 & \text{παραγωγίζω} \\ ml\ddot{\theta} + mg\sin\theta = 0 & \times\dot{\theta} \text{ και ολοκληρώνω} \end{cases}$

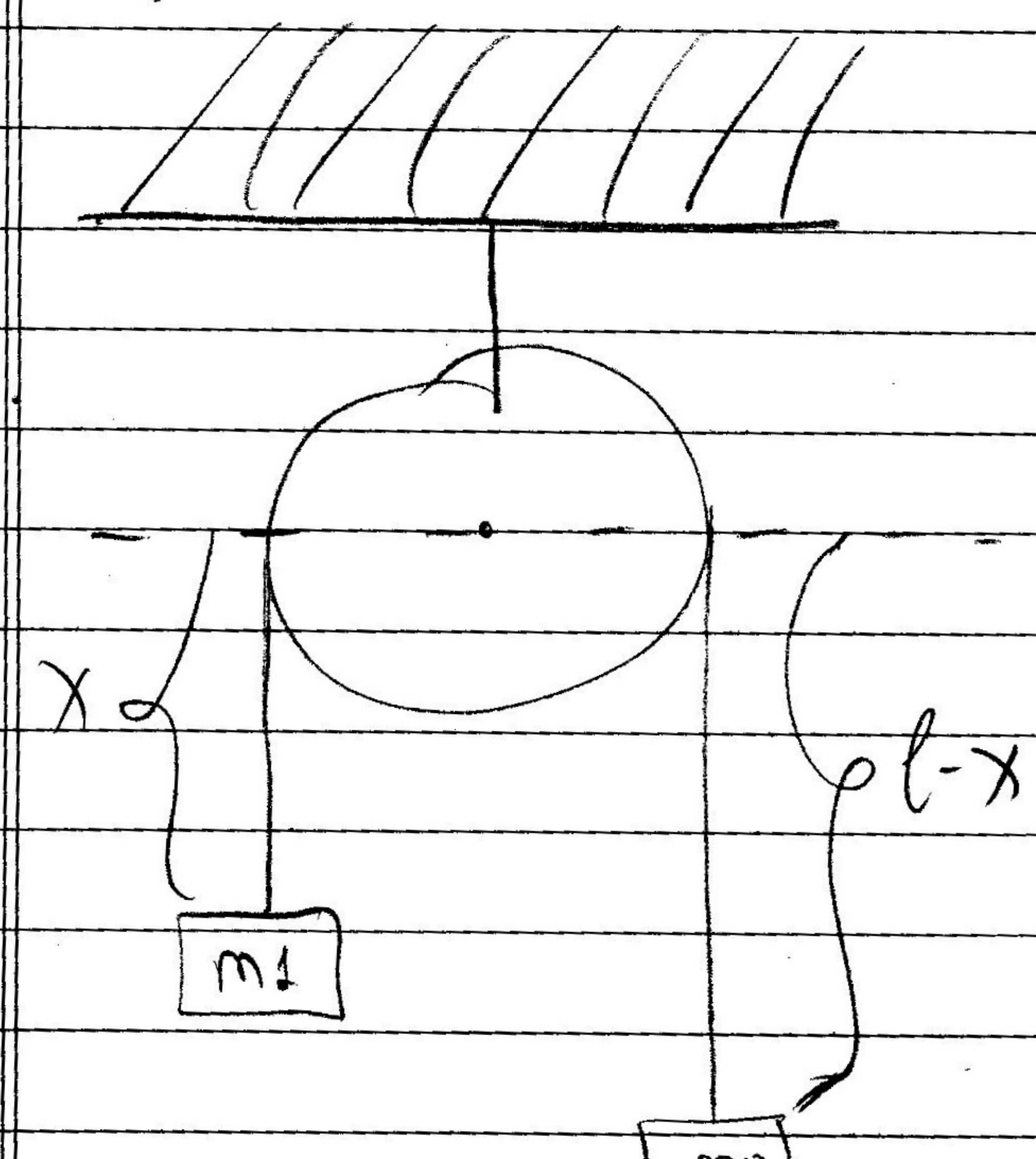
$$\boxed{l\ddot{\theta} + g\sin\theta = 0}$$

Όταν $\sin\theta \approx \theta$, μικρές γωνίες

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0 \Rightarrow \ddot{\theta} + \omega^2\theta = 0$$

$$\omega^2 = g/l$$

<u>Παράδειγμα: Η μηχανή του Atwood</u>



$$T = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{x}^2$$

$$V = -m_1 g x - m_2 g(l - x)$$

$$L = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{x}^2 + m_1 g x + m_2 g(l - x)$$

$\rightarrow$

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = 0$$

$$m_1 g - m_2 g - \frac{d}{dt}\frac{1}{2}(m_1+m_2)\, x \cdot \dot{x} = 0$$

$$\Rightarrow (m_1+m_2)\ddot{x} + (m_2-m_1)g = 0 \Rightarrow$$

$$\boxed{\ddot{x} = \frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}\, g}$$